Betrachtung von Formeln, deren Integration mithilfe von Kegelschnitten durchgeführt werden kann *

Leonhard Euler

Lemmata

$$\text{I.} \quad \int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{1}{k} \int dx \sqrt{\frac{fk-gh+gxx}{xx-h}}$$

für $x = \sqrt{h+kzz}$ gesetzt.

$$\text{II.} \quad \int \frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}} = \frac{1}{g} \int dx \sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}} = \frac{1}{k} \int dy \sqrt{\frac{yy-h}{fk-gh+gyy}}$$

für $x = \sqrt{f+gzz}$ und $y = \sqrt{h+kzz}$ gesetzt.

*Originaltitel: "Consideratio formularum quarum integratio per arcus sectionum conicarum absolvi absolvi potest ", zuerst publiziert in: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 8* (1763, verfasst 1761): pp. 129–149, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 20, pp. 235 – 255, Eneström-Nummer E273, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

III. $$\int \frac{dz\sqrt{f+gzz}}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{g+(fk-gh)xx}{1-hxx}} = \frac{1}{h}\int dy\sqrt{\frac{f+(gh-fk)yy}{1-kyy}}$$

für $x = \dfrac{1}{\sqrt{h+kzz}}$ und $y = \dfrac{z}{\sqrt{h+kzz}}$ gesetzt.

IV. $$\int \frac{dz\sqrt{h+kzz}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}} = \frac{1}{f}\int dy\sqrt{\frac{h+(fk-gh)yy}{1-gyy}}$$

für $x = \dfrac{1}{\sqrt{f+gzz}}$ und $y = \dfrac{z}{\sqrt{f+gzz}}$ gesetzt.

V. $$\int \frac{dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{h+kzz}} = \frac{1}{f}\int dx\sqrt{\frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}} = \frac{1}{fk-gh}\int dy\sqrt{\frac{k-gyy}{fyy-h}}$$

für $x = \dfrac{z}{\sqrt{f+gzz}}$ und $y = \sqrt{\dfrac{h+gzz}{f+gzz}}$ gesetzt.

VI. $$\int \frac{dz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f+gzz}} = \frac{1}{h}\int dx\sqrt{\frac{1-kxx}{f+(gh-fk)xx}} = \frac{1}{gh-fk}\int dy\sqrt{\frac{g-kyy}{hyy-f}}$$

für $x = \dfrac{z}{\sqrt{h+kzz}}$ und $y = \sqrt{\dfrac{f+gzz}{h+kzz}}$ gesetzt.

VII. $$\int \frac{zzdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{h+kzz}} = -\frac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gh-fk)xx}} = \frac{1}{fk-gh}\int dy\sqrt{\frac{fyy-h}{k-gyy}}$$

für $x = \dfrac{1}{\sqrt{f+gzz}}$ und $y = \sqrt{\dfrac{h+kzz}{f+gzz}}$ gesetzt.

VIII. $$\int \frac{zzdz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f+gzz}} = -\frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{1-hxx}{g+(fk-gh)xx}} = \frac{1}{gh-fk}\int dy\sqrt{\frac{hyy-f}{g-kyy}}$$

für $x = \dfrac{1}{\sqrt{h+kzz}}$ und $y = \sqrt{\dfrac{f+gzz}{h+kzz}}$ gesetzt.

THEOREME

$$\text{I.}\quad \int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=\frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{fk-gh+gxx}{xx-h}}$$

für $x=\sqrt{h+kzz}$ gesetzt.

$$\text{II.}\quad \int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}-\int dx\sqrt{\frac{hxx-f}{g-kxx}}$$

für $x=\sqrt{\dfrac{f+gzz}{h+kzz}}$ gesetzt.

$$\text{III.}\quad \int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}+\frac{gh-fk}{k}\int dx\sqrt{\frac{1-gxx}{g+(fk-gh)xx}}$$

für $x=\dfrac{z}{\sqrt{f+gzz}}$ gesetzt.

$$\text{IV.}\quad \int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=\frac{g}{k}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}+\frac{fk-gh}{k}\int dx\sqrt{\frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}}$$

für $x=\dfrac{z}{\sqrt{h+gzz}}$ gesetzt.

$$\text{V.}\quad \int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=\frac{g}{k}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}+\frac{f}{k}\int dx\sqrt{\frac{k-gxx}{fxx-h}}$$

für $x=\sqrt{\dfrac{h+kzz}{f+gzz}}$ gesetzt.

$$\text{VI.}\quad \int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=\frac{f}{h}\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}+\frac{gh-fk}{hk}\int dx\sqrt{\frac{xx-h}{fk-gh+gxx}}$$

für $x=\sqrt{h+kzz}$ gesetzt.

$$\text{VII.}\quad \int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{f}{h}\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + \frac{gh-fk}{hk}\int dx\sqrt{\frac{xx-h}{fk-gh+gxx}}$$

für $x = \sqrt{h+kzz}$ gesetzt.

$$\text{VIII.}\quad \int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + P + Q,$$

mit

$$P = \frac{gh-fk}{gk}\int dx\sqrt{\frac{g+(fk-gh)xx}{1-hxx}} = \frac{fk-gh}{gh}\int dy\sqrt{\frac{f+(gh-fk)yy}{1-kyy}}$$

für $x = \dfrac{1}{\sqrt{h+kzz}}$ und $y = \dfrac{z}{\sqrt{h+kzz}}$ gesetzt

und

$$Q = \frac{-f(fk-gh)}{gh}\int dx\sqrt{\frac{1-kxx}{f+(gh-fk)xx}} = \frac{f}{g}\int dy\sqrt{\frac{g-kyy}{kyy-f}}$$

für $x = \dfrac{z}{\sqrt{h+kzz}}$ und $y = \sqrt{\dfrac{f+gzz}{h+kzz}}$ gesetzt.

$$\text{IX.}\quad \int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{fk}{gh}z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + P + Q,$$

mit

$$P = \frac{gh-fk}{gh}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}} = \frac{gh-fk}{hk}\int dy\sqrt{\frac{yy-h}{fk-gh+gyy}}$$

für $x = \sqrt{f+gzz}$ und $y = \sqrt{h+kzz}$ gesetzt

und

$$Q = \frac{f(gh-fk)}{gh}\int dx\sqrt{\frac{1-kxx}{f+(gh-fk)xx}} = \frac{f}{g}\int dy\sqrt{\frac{g-kyy}{hyy-f}}$$

für $x = \dfrac{z}{\sqrt{h+kzz}}$ und $y = \sqrt{\dfrac{f+gzz}{h+kzz}}$ gesetzt.

$$\text{X.}\quad \int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{gh-fk}{gh}z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + \frac{f}{h}\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + P,$$

mit

$$P = \frac{gh-fk}{gk}\int dx\sqrt{\frac{g+(fk-gh)xx}{1-hxx}} = \frac{fk-gh}{gh}\int dy\sqrt{\frac{f+(gh-fk)yy}{1-kyy}}$$

für $x = \dfrac{1}{\sqrt{h+kzz}}$ und $y = \dfrac{z}{\sqrt{h+kzz}}$ gesetzt.

$$\text{XI.}\quad \int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{f}{h}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + P + Q,$$

mit

$$P = \frac{gh-fk}{gh}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}} = \frac{gh-fk}{hk}\int dy\sqrt{\frac{yy-h}{fk-gh+gyy}}$$

für $x = \sqrt{f+gzz}$ und $y = \sqrt{h+kzz}$ gesetzt

und

$$Q = \frac{f(fk-gh)}{gh}\int dx\sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gh-fk)xx}} = \frac{-f}{h}\int dy\sqrt{\frac{fyy-h}{k-gyy}}$$

für $x = \dfrac{1}{\sqrt{f+gzz}}$ und $y = \sqrt{\dfrac{h+kzz}{f+gzz}}$ gesetzt.

$$\text{XII.}\quad \int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{g}{k}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + P + Q,$$

mit

$$P = \frac{f(gh-fk)}{ghk} \int dx \sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}} = \frac{fk-gh}{hk} \int dy \sqrt{\frac{h+(fk-gh)yy}{1-gyy}}$$

$$\text{für } x = \frac{1}{\sqrt{f+gzz}} \text{ und } y = \sqrt{\frac{z}{f+gzz}} \text{ gesetzt}$$

und

$$Q = \frac{f(fk-gh)}{gh} \int dx \sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gh-fk)xx}} = \frac{-f}{h} \int dy \sqrt{\frac{fyy-h}{k-gyy}}$$

$$\text{für } x = \frac{1}{\sqrt{f+gzz}} \text{ und } y = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} \text{ gesetzt.}$$

$$\text{XIII.} \quad \int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{gh-fk}{hk} z \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + \frac{f}{h} \int dz \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + P,$$

mit

$$P = \frac{f(gh-fk)}{ghk} \int dx \sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}} = \frac{fk-gh}{hk} \int dy \sqrt{\frac{h+(fk-gh)yy}{1-gyy}}$$

$$\text{für } x = \frac{1}{\sqrt{f+gzz}} \text{ und } y = \sqrt{\frac{z}{\sqrt{f+gzz}}} \text{ gesetzt.}$$

Ein einzigartiges Theorem

Es gilt

$$\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{-gxz}{\sqrt{p}} - \int dx \sqrt{\frac{f+gxx}{h+kxx}},$$

wo p eine beliebige Konstante bezeichnet, nachdem zwischen x und z die Relation

$$gkxxzz - pxx - pzz - 2xz\sqrt{(p+fk)(p+gh)} + fh = 0$$

oder

$$x = \frac{-z\sqrt{(p+fk)(p+gh)} + \sqrt{p(f+gzz)(h+kzz)}}{p-gkzz}$$

festgesetzt worden ist.

Annahme

Das Zeichen $\Pi x[a]$ *bezeichne den vom Scheitel aus genommenen Bogen, dem auf der transversalen Halbachse die Abszisse* $= x$ *zukommt, des Kegelschnitts, dessen Halbparameter* $= 1$ *und transversale Halbachse* $= a$ *ist.*

Korollar

Wenn a eine positive Größe ist, wird auf diese Weise ein Ellipsenbogen bezeichnet, wenn sie aber negativ ist, ein Hyperbelbogen, wenn freilich x eine positive Größe und kleiner als $2a$ war.

Integrationen der Formel $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ eingeteilt in 12 Fälle

Fall I $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h-kzz}}$

Das Integral ist unmittelbar

$$C - \frac{fk+gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{fk+gh}\left(1 - z\sqrt{\frac{k}{h}}\right)\left[\frac{fk}{fk+gh}\right]$$

oder auch nach Theorem I

$$C + \frac{f}{\sqrt{fk+gh}}\Pi\frac{fk+gh}{fk}\left(1 - \frac{\sqrt{h-kzz}}{\sqrt{h}}\right)\left[\frac{fk+gh}{fk}\right].$$

Fall II $\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}}$ mit $fk > gh$

Das Integral ist unmittelbar

$$C - \frac{fk-gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{fk-gh}\left(1 - z\sqrt{\frac{k}{h}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gh}\right]$$

oder auch nach Theorem I

$$C + \frac{f}{\sqrt{fk - gh}} \Pi \frac{fk - gh}{fk} \left(1 - \frac{\sqrt{h - kzz}}{\sqrt{h}} \right) \left[\frac{fk - gh}{fk} \right].$$

Fall III $\int dz \sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}}$ **mit** $fk < gh$

Das Integral ist unmittelbar

$$C + \frac{gh - fk}{k\sqrt{fk}} \Pi \frac{fk}{gh - fk} \left(z\sqrt{\frac{k}{h}} - 1 \right) \left[\frac{-fk}{gh - fk} \right].$$

Fall IV $\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ **mit** $fk < gh$

Das Integral ist nach Theorem I

$$C + \frac{f}{\sqrt{gh - fk}} \Pi \frac{gh - fk}{fk} \left(\frac{\sqrt{h + kzz}}{\sqrt{h}} - 1 \right) \left[\frac{-gh + fk}{fk} \right].$$

Fall V $\int dz \sqrt{\frac{-f+gzz}{h+kzz}}$

Das Integral ist nach Theorem III

$$C + z\sqrt{\frac{-f + gzz}{h + kzz}} - \frac{f}{\sqrt{fk + gh}} \Pi \frac{fk + gh}{fk} \left(1 - \frac{\sqrt{fk + gh}}{\sqrt{g(h + kzz)}} \right) \left[\frac{fk + gh}{fk} \right]$$

oder nach Theorem II

$$C + z\sqrt{\frac{-f + gzz}{h + kzz}} + \frac{fk + gh}{k\sqrt{fk}} \Pi \frac{fk}{fk + gh} \left(1 - \frac{\sqrt{k(-f + gzz)}}{\sqrt{g(h + kzz)}} \right) \left[\frac{fk}{fk + hg} \right].$$

Fall VI $\int dz \sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}}$ **mit** $fk > gh$

Das Integral ist nach Theorem III

$$C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}}-\frac{f}{\sqrt{fk-gh}}\Pi\frac{fk-gh}{fk}\left(1-\frac{\sqrt{fk-gh}}{\sqrt{g(-h+kzz)}}\right)\left[\frac{fk-gh}{fk}\right]$$

oder auch nach Theorem II

$$C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}}+\frac{fk-gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{fk-gh}\left(1-\frac{\sqrt{k(-f+gzz)}}{\sqrt{g(-h+kzz)}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gh}\right].$$

Fall VII $\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}}$ **mit** $fk<gh$

Das Integral ist nach Theorem III

$$C+\frac{gz}{k}\sqrt{\frac{h-kzz}{f-gzz}}-\frac{gh-fk}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh-fk}\left(\frac{\sqrt{f(h-kzz)}}{\sqrt{h(f-gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh-fk}\right].$$

Fall VIII $\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{h-kzz}}$ **mit** $fk<gh$

Das Integral ist nach Theorem II

$$C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{h-kzz}}-\frac{f}{\sqrt{gh-fk}}\Pi\frac{gh-fk}{fk}\left(\frac{\sqrt{gh-fk}}{\sqrt{g(h-kzz)}}-1\right)\left[\frac{-gh+fk}{fk}\right]$$

oder auch nach Theorem V

$$C-\frac{gz}{k}\sqrt{\frac{h-kzz}{-f+gzz}}+\frac{f}{\sqrt{gh-fk}}\Pi\frac{gh-fk}{fk}\left(\frac{z\sqrt{gh-fk}}{\sqrt{h(-f+gzz)}}-1\right)\left[\frac{-gh+fk}{fk}\right].$$

Fall IX $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ **mit** $fk>gh$

Das Integral ist durch Theorem X

$$C-\frac{(fk-gh)z}{gh}\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}-\frac{fk-gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(1-\frac{z\sqrt{k}}{\sqrt{h+kzz}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$

$$+\frac{f}{\sqrt{fk-gh}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{f}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

oder auch nach Theorem XIII

$$C-\frac{(fk-gh)z}{hk}\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}+\frac{fk-gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{f+gzz}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$
$$+\frac{f}{\sqrt{fk-gh}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{f}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right].$$

Fall X $\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{-h+kzz}}$ **mit** $fk>gh$

Das Integral ist nach Theorem IX

$$C+\frac{fkz}{gh}\sqrt{\frac{f-gzz}{-h+kzz}}+\frac{fk-gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{k(f-gzz)}}{\sqrt{fk-gh}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$
$$-\frac{f}{\sqrt{fk-gh}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{z\sqrt{fk-gh}}{\sqrt{f(-h+kzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

oder auch nach Theorem XI

$$C-\frac{fz}{h}\sqrt{\frac{-h+kzz}{f-gzz}}+\frac{fk-gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{k(f-gzz)}}{\sqrt{fk-gh}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$
$$+\frac{f}{\sqrt{fk-gh}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{\sqrt{fk-gh}}{\sqrt{k(f-gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right].$$

Fall XI $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{-h+kzz}}$

Das Integral ist nach Theorem XI

$$C-\frac{fz}{h}\sqrt{\frac{-h+kzz}{f+gzz}}+\frac{f}{\sqrt{fk+gh}}\Pi\frac{fk+gh}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{fk+gh}}{\sqrt{k(f+gzz)}}\right)\left[\frac{fk+gh}{gh}\right]$$

$$+\frac{fk+gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(\frac{\sqrt{k(f+gzz)}}{\sqrt{fk+gh}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh}\right]$$

oder auch nach Theorem XII

$$C+\frac{gz}{k}\sqrt{\frac{-h+kzz}{f+gzz}}+\frac{f}{\sqrt{fk+gh}}\Pi\frac{fk+gh}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{fk+gh}}{\sqrt{k(f+gzz)}}\right)\left[\frac{fk+gh}{gh}\right]$$

$$+\frac{fk+gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{f+gzz}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh}\right].$$

Fall XII $\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h+kzz}}$

Das Integral ist nach Theorem XIII

$$C-\frac{(fk+gh)}{hk}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f-gzz}}+\frac{f}{\sqrt{fk+gh}}\Pi\frac{fk+gh}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{f-gzz}}{\sqrt{f}}\right)\left[\frac{fk+gh}{gh}\right]$$

$$+\frac{fk+gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{f-gzz}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh}\right]$$

Daher können also alle Fälle der Formel

$$\int dx\sqrt{\frac{\alpha+\beta zz}{\gamma+\delta zz}},$$

wie auch immer die Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beschaffen waren, mithilfe von Bogen von Kegelschnitten integriert werden.

Daher lassen nicht nur die anfangs erwähnten Formeln eine Integration mit Kreisbogen zu, sondern auch unzählige andere, die es erlauben per Substitution auf die Form

$$\int dz\sqrt{\frac{\alpha+\beta xx}{\gamma+\delta xx}}$$

zurückgeführt zu werden, von welcher Art die folgenden sind

$$1. \quad \int \frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = -\int dx\sqrt{\frac{fxx+g}{hxx+k}} = -\frac{1}{h}\int dy\sqrt{\frac{fyy-fk+gh}{yy-k}}$$

für $x = \frac{1}{z}$ und $y = \frac{\sqrt{h+kzz}}{z}$ gesetzt,

$$2. \quad \int \frac{dz}{zz\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}} = -\frac{1}{f}\int dx\sqrt{\frac{xx-g}{hxx+fk-gh}} = -\frac{1}{h}\int dy\sqrt{\frac{yy-k}{fyy-fk+gh}}$$

für $x = \frac{\sqrt{f+gzz}}{z}$ und $y = \frac{\sqrt{h+kzz}}{z}$ gesetzt,

$$3. \quad \int \frac{dz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}} = \frac{k}{fk-gh}\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} - \frac{g}{fk-gh}\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}},$$

die Reduktion welcher Formel auch so durchgeführt wird

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}} = \frac{f}{fk-gh}\int dx\sqrt{\frac{k-gxx}{fyy-h}} + \frac{g}{fk-gh}\int dx\sqrt{\frac{fyy-h}{k-gxx}}$$

für $x = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$ gesetzt

oder auch so

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}} = \int dx\sqrt{\frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}} - \int dy\sqrt{\frac{1-fyy}{k+(gh-fk)yy}}$$

für $x = \frac{z}{\sqrt{f+gzz}}$ und $y = \frac{1}{\sqrt{f+gzz}}$ gesetzt.

Wir wollen $zz = v$ setzen und werden die folgenden Formeln erhalten, welche gleichermaßen durch Bogen von Kegelschnitten konstruiert werden können werden

1. $\int \frac{dv\sqrt{f+gv}}{\sqrt{v(h+kv)}}$ 2. $\int \frac{dv\sqrt{f+gv}}{v\sqrt{v(h+kv)}}$

3. $\int \frac{dv\sqrt{v}}{\sqrt{(f+gv)(h+kv)}}$ 4. $\int \frac{dv}{\sqrt{v(f+gv)(h+kv)}}$

5. $\int \frac{dv\sqrt{f+gv}}{(h+kv)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v}}$ 6. $\int \frac{dv}{v\sqrt{v(f+gv)(h+kv)}}$

7. $\int \frac{dv}{(f+gv)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v(h+kv)}}$ 8. $\int \frac{dv\sqrt{v}}{(f+gv)^{\frac{3}{2}}\sqrt{h+kv}}$;

denn diese werden umgekehrt für $v = zz$ gesetzt auf die vorhergehenden Formen zurückgeführt.

Daher ist klar, dass diese sich ziemlich weit erstreckende Formel auf Bogen von Kegelschnitten reduziert werden kann

$$\int \frac{(A+Bu)du}{\sqrt{(\alpha+\beta u)(\gamma+\delta u)(\varepsilon+\zeta u)}},$$

welche es verdient besonders bemerkt zu werden. Denn man setze $\alpha+\beta u = v$, dass $u = \frac{v-\alpha}{\beta}$ ist, und diese Formel wird in diese überführt werden

$$\int \frac{dv(A\beta - B\alpha + Bv)}{\beta\sqrt{v(\beta\gamma - \alpha\delta - \delta v)(\beta\varepsilon - \alpha\zeta + \zeta v)}},$$

welche auf die zwei unten Nummer 3. und 4. erwähnten Formeln zurückgeführt wird. Wenn also

$$\alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3$$

drei reelle Faktoren hat, wird diese Formel

$$\int \frac{dx(A+Bx)}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3}}$$

auf die dargelegte Weise integriert werden können; sie wird aber immer zumindest einen reellen Faktor haben. Wenn aber zwei imaginär sind, kann die Formel $\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3$ so darstellt werden $y(pp+2npqy+qqyy)$ mit $nn < 1$, dass das Integral dieser Formeln zu bestimmen ist

$$\int \frac{Cdy}{\sqrt{y(pp+2npqy+qqyy)}} + \int \frac{Ddy\sqrt{y}}{\sqrt{pp+2npqy+qqyy}}.$$

Man setze

$$\sqrt{pp+2npqy+qqyy} = p+qyz$$

und es wird $y = \frac{2p(z-n)}{q(1-zz)}$ werden, mit welcher Substitution die erste Formel in die konstruierbare

$$\frac{C\sqrt{2}}{\sqrt{pq}} \int \frac{dz}{\sqrt{(z-n)(1-z)(1+z)}}$$

übergeht, die zweite hingegen in diese

$$\frac{2D\sqrt{2p}}{q\sqrt{q}} \int \frac{dz\sqrt{z-n}}{(1-zz)^{\frac{3}{2}}};$$

weil aber

$$\int \frac{dz\sqrt{z-n}}{(1-zz)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\sqrt{z-n}}{\sqrt{1-zz}} - \frac{1}{2} \int \frac{zdz}{\sqrt{(z-n)(1-z)(1+z)}}$$

ist, kann auch diese durch die obigen konstruiert werden. Und so hat man im Allgemeinen die Konstruktion dieser Formel

$$\int \frac{dx(A+Bx)}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3}}.$$

PROBLEM 1

Die Integration dieser Formel

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cxx+dx^3+ex^4}}$$

mithilfe von Bogen von Kegelschnitten durchzuführen.

LÖSUNG

Die Größe $a+bx+cxx+dx^3+ex^4$ lässt sich immer in zwei einfache trinomiale auflösen, welche $(\alpha+2\beta x+\gamma xx)$ und $(\delta+2\varepsilon x+\zeta xx)$ seien, sodass man diese Formel zu integrieren hat

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha+2\beta x+\gamma xx)(\delta+2\varepsilon x+\zeta xx)}}.$$

Man setze

$$\delta+2\varepsilon x+\zeta xx=(\alpha+2\beta x+\gamma xx)y,$$

dass diese Formel vorgelegt ist

$$\int \frac{dx}{(\alpha+2\beta x+\gamma xx)\sqrt{y}}.$$

Aber die angenommene Gleichung liefert durch Ziehen der Wurzel

$$\varepsilon+\zeta x-\beta y-\gamma xy=\sqrt{pyy+qy+r}$$

für

$$p=\beta\beta-\alpha\gamma, \quad q=\alpha\zeta-2\beta\varepsilon+\gamma\delta \quad \text{und} \quad r=\varepsilon\varepsilon-\delta\zeta.$$

Dann gibt aber dieselbe differenziert

$$dx(\varepsilon+\zeta x-\beta y-\gamma xy)=\frac{1}{2}dy(\alpha+2\beta y+\gamma xx)$$

oder

$$\frac{dx}{\alpha+2\beta x+\gamma xx}=\frac{\frac{1}{2}dy}{\varepsilon+\zeta x-\beta y-\gamma xy}.$$

Wenn wir also für diesen letzten Nenner den gerade gefundenen irrationalen Wert einsetzen, geht die vorgelegte Formel über in diese

$$\int \frac{\frac{1}{2}dy}{\sqrt{y(pyy+qy+r)}},$$

deren Integration mittels Bogen von Kegelschnitten oben gezeigt worden ist. Hier ergibt sich also die Frage, was über diese Formel zu bemerken ist

$$\int \frac{dx(A + Bx + Cxx)}{\sqrt{a + bx + cxx + dx^3 + ex^4}}.$$

Es ist nämlich ersichtlich, dass es nicht notwendig ist, dass dem Zähler höhere Potenzen von x zugeteilt werden; der hoch geehrte D' ALEMBERT sogar zugegeben, dass er sie im Allgemeinen nicht auf die Rektifikation von Kegelschnitten zurückführen kann. Er betrachtet zwar in Band IV der Mem. Acad. R. Berol. auf Seite 254 den Fall, in dem $A = 0$, $C = 0$ und $a = 0$ ist, sodass die Formel

$$\int \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{b + cx + dx^2 + ex^3}}$$

ist, und versucht zu zeigen (S. 257), dass ihre Integration im Fall $dd = 4ce$ mittels Bogen von Kegelschnitten durchgeführt werden kann; aber die Methode, die er gebraucht, scheint die Aufgabe keineswegs zu erledigen, wie dem aufmerksamen Leser bald klar werden wird. In der Tat geben die Transformationen, welche er darauf folgend angibt, auf diese Weise nie handhabbare Fälle an die Hand. Deshalb ist diese Untersuchung, wie sie höchst schwierig ist, mit Recht der ganzen Aufmerksamkeit würdig anzusehen, woher es auch förderlich sein wird, meine Versuche zu dieser Frage vorgelegt zu haben.

PROBLEM 2

Die Bedingungen zu finden, unter denen sich die Integration dieser Formel

$$\int \frac{dy(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}y + \mathfrak{R}yy)}{\sqrt{\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}yy + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E}}}$$

auf diese einfachere

$$\int \frac{dx(P + Qx + Rxx)}{\sqrt{Ax^4 + Cxx + E}}$$

zurückführen lässt.

LÖSUNG

Man lege zwischen den zwei Variablen x und y eine solche Relation fest

$$\alpha xxyy + 2xy(\beta x + \gamma y) + \delta xx + \varepsilon yy + 2\zeta xy + 2\eta x + 2\theta y + \varkappa = 0,$$

deren Koeffizienten man so bestimme, dass gilt

$$\begin{aligned} &\beta\zeta - \alpha\eta - \gamma\delta = 0, && \zeta\theta - \gamma\varkappa - \varepsilon\eta = 0, \\ &\gamma\gamma - \alpha\varepsilon = \mathfrak{A}, && \gamma\zeta - \alpha\theta - \beta\varepsilon = \mathfrak{B}, \\ &\eta\eta - \delta\varkappa = \mathfrak{E}, && \zeta\eta - \beta\varkappa - \delta\theta = \mathfrak{D} \end{aligned}$$

und

$$\zeta\zeta + 2\gamma\eta - \alpha\varkappa - \delta\varepsilon - 4\beta\theta = \mathfrak{C},$$

und daher wird für den Nenner der transformierten Form

$$A = \beta\beta - \alpha\delta, \quad E = \theta\theta - \varepsilon\varkappa$$

und

$$C = \zeta\zeta + 2\beta\theta - \alpha\varkappa - \delta\varepsilon - 4\gamma\eta$$

sein. Weil man aber die neun Buchstaben α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, $\varkappa$ hat, wird diesen sieben vorgeschriebenen Bedingungen in jedem Fall Genüge geleistet werden können und es wir immer noch eine nach unserem Belieben zu bestimmende übrig bleiben. Wenn wir nun der Kürze wegen

$$\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E} = Y \quad \text{und} \quad Ax^4 + Cxx + E = X$$

setzen, liefert die Auflösung der angenommenen Gleichung

$$\begin{aligned} \alpha xyy + 2\beta xy + \delta x + \gamma yy + \zeta y + \eta &= \sqrt{Y}, \\ \alpha xxy + 2\gamma xy + \varepsilon y + \beta xx + \zeta x + \theta &= \sqrt{X} \end{aligned}$$

und ihre Differenzierung führt zu dieser Gleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{dx}{\sqrt{X}} = 0.$$

Wir wollen also

$$\int \frac{dy(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}y + \mathfrak{R}yy)}{\sqrt{\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E}}} = V - \int \frac{dx(P + Qx + Rxx)}{\sqrt{Ax^4 + Cx^2 + E}}$$

setzen und V sei eine solche algebraische Funktion

$$V = mx + ny + pxy + \frac{1}{2}qxx + \frac{1}{2}ryy + txyy.$$

Daher wird man nach Nehmen der Differentiale und jeweiligem Gleichsetzen der homogenen Terme die folgenden Bestimmungen finden

$$m = \frac{\beta\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}, \quad n = \frac{\gamma\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}, \quad p = \frac{\alpha\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}, \quad q = 0, \quad r = 0 \quad \text{und} \quad t = 0,$$

zusätzlich kommt aber diese Bestimmung hinzu, dass $\mathfrak{A}\mathfrak{Q} = \mathfrak{B}\mathfrak{R}$ ist. Weiter wird

$$P = \mathfrak{P} + \frac{(\beta\theta - \gamma\eta)\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}, \quad Q = 0 \quad \text{und} \quad R = \frac{A\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}.$$

Also werden nach Bestimmen der Koeffizienten α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, $\varkappa$, aus denen die Relation zwischen x und y besteht, aus ihnen die Größen A, C, E bekannt, nach Finden von welchen, wenn $\mathfrak{A}\mathfrak{Q} = \mathfrak{B}\mathfrak{R}$ war,

$$\frac{dy(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}y + \mathfrak{R}yy)}{\sqrt{\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E}}} = \text{Konst.} + \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}(\beta x + \gamma y + \alpha xy)$$
$$- \int \frac{dx\left(\mathfrak{P} + \frac{(\beta\theta - \gamma\eta)\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}} + \frac{A\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}\right)}{\sqrt{Ax^4 + Cx^2 + E}}$$

sein wird. Solange also $\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}$ war, ist die Integration der vorlegten Formel auf diese einfachere zurückgeführt worden

$$\int \frac{dx(P + Rxx)}{\sqrt{Ax^4 + Cx^2 + E}}.$$

KOROLLAR 1

Die Bestimmung der Koeffizienten α, β, γ etc. wird am angenehmsten auf diese Weise unternommen werden. Zuerst suche man den Wert von s aus dieser Gleichung

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B} - \mathfrak{D}\mathfrak{D}ss}{\mathfrak{A} - \mathfrak{E}ss} + \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{D} - 2\mathfrak{B}\mathfrak{E}s}{\mathfrak{B} - \mathfrak{D}s},$$

weil welche eine kubische ist, wird sie gewiss ein reellen Wert für s geben; nach Finden von diesem und nach beliebiger Auswahl der Größe t sei der Kürze wegen $\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{E}ss}{\mathfrak{B}-\mathfrak{D}s} = u$, dann werden sich aber die Werte aller 9 Koeffizienten so verhalten

$$\zeta = u\sqrt{\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 3\mathfrak{A}\mathfrak{D}s + 3\mathfrak{B}\mathfrak{E}ss - \mathfrak{D}\mathfrak{E}s^3}{s(s-uu)(\mathfrak{B} - \mathfrak{D}s)}},$$

$$\gamma = \frac{\zeta s}{2u}, \quad \alpha = \frac{u}{2t(s-uu)},$$

$$\eta = \frac{\zeta}{2u}, \quad \delta = \frac{u}{2st(s-uu)},$$

$$\beta = \frac{1}{2t(s-uu)}, \quad \theta = \frac{1}{2}t\left(2(\mathfrak{A} + \mathfrak{E}ss) - \frac{3}{u}(\mathfrak{B} - \mathfrak{D}s)\right),$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}t(4\mathfrak{A}u - 3\mathfrak{B}s + \mathfrak{D}ss), \quad \varkappa = \frac{1}{2}t(4\mathfrak{E}su + \mathfrak{B} - 3\mathfrak{D}s).$$

Korollar 2

Dasselbe kann auf eine andere Weise geleistet werden. Natürlich wird nach Extraktion des Wertes s aus dieser Gleichung

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B} - \mathfrak{D}\mathfrak{D}ss}{\mathfrak{A} - \mathfrak{E}ss} + \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{D} - 2\mathfrak{B}\mathfrak{E}s}{\mathfrak{B} - \mathfrak{D}s},$$

und nachdem der Kürze wegen $\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{E}ss}{\mathfrak{B}-\mathfrak{D}s} = u$ gesetzt und t nach Belieben genommen worden ist, gelten

$$\alpha = -\frac{1}{4tu}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s(\mathfrak{B} + \mathfrak{D}s)}{u}}, \quad \delta = \frac{1}{4stu},$$

$$\varepsilon = t(4\mathfrak{A}u - \mathfrak{B}s - \mathfrak{D}ss), \quad \zeta = \sqrt{\frac{u(\mathfrak{B} + \mathfrak{D}s)}{s}}, \quad \eta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{D}s}{us}},$$

$$\theta = 2tu(\mathfrak{B} - \mathfrak{D}s), \quad \varkappa = t(\mathfrak{B} + \mathfrak{D}s - 4\mathfrak{E}su).$$

KOROLLAR 3

Wenn $\mathfrak{A} : \mathfrak{E} = \mathfrak{B}\mathfrak{B} : \mathfrak{D}\mathfrak{D}$ war, ist die kubische Gleichung ungeeignet für das Definieren des Wertes s. Dieser Umstand wird aber leicht beseitigt, indem man die Differentialformel vermöge der Festlegung $y = y \pm a$ transformiert; dadurch wird nämlich die Form des Zählers nicht verändert.

SCHOLION

Nach Setzen von $\mathfrak{R} = n\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{Q} = n\mathfrak{B}$ kann die Integration dieser Formel

$$\int \frac{dy(\mathfrak{P} + n\mathfrak{B}y + n\mathfrak{A}yy)}{\sqrt{\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E}}}$$

immer auf die Integration einer solchen

$$\int \frac{dx(P + Rxx)}{\sqrt{Ax^4 + Cxx + E}}$$

zurückgeführt werden, die, wenn der Nenner $Ax^4 + Cxx + E$ es erlaubt in zwei reelle Faktoren von dieser Art $(f + gxx)(h + kxx)$ aufgelöst zu werden, mithilfe der Rektifikation von Kegelschnitten erledigt wird; aber wenn eine solche Auflösung nicht gelingt, wird die Aufgabe mit folgendem Kunstgriff gelöst werden können.

PROBLEM 3

Wenn in der Formel

$$\int \frac{dx(P + Rxx)}{\sqrt{Ax^4 + Cx^2 + E}}$$

die Größe $Ax^4 + Cx^2 + E$ nicht in zwei reelle Faktoren von dieser Art $(f + gxx)(h + kxx)$ aufgelöst werden kann, sie in eine andere zu überführen, die sicher mithilfe von Bogen von Kegelschnitten integriert werden kann.

LÖSUNG

Man führe eine andere Variable z ein, deren Relation zu x mit dieser Gleichung ausgedrückt werde

$$4Exxz^4 - 4xxzz\sqrt{AE} - 4Ezz + 2\sqrt{AE} - C = 0,$$

wo $\sqrt{AE}$ eine reelle Größe sein wird, wenn $Ax^4 + Cxx + E$ keine reellen binomialen Faktoren hat. Daher wird aber

$$\int \frac{dx(P + Rxx)}{\sqrt{Ax^4 + Cx^2 + E}} = \text{Konst.} + \frac{Rx}{\sqrt{A}} - \frac{2R\sqrt{E}}{A}xzz$$
$$-2\int \frac{dz\left(P - \frac{R\sqrt{E}}{\sqrt{A}} + \frac{2ER}{A}zz\right)}{\sqrt{4Ez^4 - (C - 6\sqrt{AE})zz + 2A - \frac{C\sqrt{A}}{\sqrt{E}}}}$$

werden, in welcher neuen Formel die im Nenner enthaltene Größe gewiss in zwei reelle binomiale Faktoren auflösbar ist, weil

$$\left(C - 6\sqrt{AE}\right)^2 > 16E\left(2A - \frac{C\sqrt{A}}{\sqrt{E}}\right)$$

ist, deshalb weil daraus

$$CC + 4C\sqrt{AE} + 4AE = (C + 2\sqrt{AE})^2 > 0$$

folgt.

Anders

Die neue Variable z habe zu x eine solche Relation

$$2Exxz^4 - Cxxzz + \frac{CC - 4AE}{8E}xx - 2Ezz = 0$$

und es wird

$$\int \frac{dx(P + Rxx)}{\sqrt{Ax^4 + Cxx + E}} = \frac{CR}{2A\sqrt{E}}x - \frac{2R\sqrt{E}}{A}xzz$$
$$-2\int \frac{dz\left(P - \frac{CR}{2A} + \frac{2ER}{A}zz\right)}{\sqrt{4Ez^4 - 2Czz + \frac{CC-4AE}{4E}}}$$

sein, deren Nenner gleichermaßen sicher in zwei reelle binomiale Faktoren auflösbar ist.

Nachdem all dies bewiesen worden ist, ist es offenkundig, dass diese Formel

$$\int \frac{dy(\mathfrak{P} + n\mathfrak{B}y + n\mathfrak{A}yy)}{\sqrt{\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E}}}$$

immer mithilfe von Bogen von Kegelschnitten konstruiert werden kann. Weil also der Nenner immer in zwei reelle trinomiale Faktoren aufgelöst werden kann, kann diese Formel so dargestellt werden

$$\int \frac{dy(\mathfrak{P} + n(\alpha\varepsilon + \beta\delta)y + n\alpha\delta yy)}{\sqrt{(\alpha yy + 2\beta y + \gamma)(\delta yy + 2\varepsilon y + \zeta)}},$$

von welcher also dieselbe Konstruktion gegeben ist. Weiter kann durch Vermehren oder Vermindern von y um eine Konstante Größe unsere Formel auch so dargestellt werden

$$\int \frac{dy(M + Nyy)}{\sqrt{Ay^4 + Cyy + 2Dy + E}}.$$

In diesen scheinen aber fast alle Fälle, welche sich freilich mithilfe der Rektifikation von Kegelschnitten integrieren lassen, enthalten zu sein. Wir wollen aber noch eine andere Reduktion präsentieren.

PROBLEM 4

Bedingungen zu finden, unter denen die Integration dieser Formel

$$\int \frac{dy(\mathfrak{P} + n\mathfrak{B}y + n\mathfrak{A}yy)}{\sqrt{\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E}}}$$

sich auf diese einfachere

$$\int \frac{dx(P + Qx + Rxx)}{\sqrt{2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx}}$$

zurückführen lässt.

Lösung

Man setze zwischen den Variablen x und y eine solche Relation fest

$$\alpha xxyy + 2xy(\beta x + \gamma y) + \delta xx + \varepsilon yy + 2\zeta xy + 2\eta x + 2\theta y + \varkappa = 0,$$

deren Koeffizienten man so bestimme, dass

$$\begin{aligned} &\beta\beta - \alpha\delta = 0, \quad \gamma\gamma - \alpha\varepsilon = \mathfrak{A}, \quad \gamma\zeta - \alpha\theta - \beta\varkappa = \mathfrak{B}, \\ &\theta\theta - \varepsilon\varkappa = 0, \quad \eta\eta - \delta\varkappa = \mathfrak{E}, \quad \zeta\eta - \beta\varkappa - \delta\theta = \mathfrak{D} \end{aligned}$$

und

$$\zeta\zeta + 2\gamma\eta - \alpha\varkappa - \delta\varepsilon - 4\beta\theta = \mathfrak{C}$$

ist, zu welchem Zweck man zuerst p aus dieser kubischen Gleichung bestimme

$$p^3 - \frac{1}{2}\mathfrak{C}pp - (\mathfrak{A}\mathfrak{E} - \mathfrak{B}\mathfrak{D})p + \frac{1}{2}(\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{E} - \mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{E}) = 0.$$

Nachdem weiter die Zahl m nach Belieben genommen worden ist, bestimme man q aus dieser quadratischen Gleichung

$$qq - q(\mathfrak{D}m - \mathfrak{B}) + (m\mathfrak{E} - p)(mp - \mathfrak{A}) = 0,$$

wonach, wenn erneut eine beliebige Zahl n genommen wird,

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{n(m\mathfrak{E} - p)}{\sqrt{2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E}}}, & \theta &= \frac{mp - \mathfrak{A}}{n\sqrt{2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E}}}, \\ \alpha &= \frac{nq}{\sqrt{2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E}}}, & \varkappa &= \frac{q}{n\sqrt{2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E}}}, \\ \delta &= \frac{n(m\mathfrak{E} - p)^2}{q\sqrt{2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E}}}, & \varepsilon &= \frac{(mp - \mathfrak{A})^2}{nq\sqrt{2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E}}}, \\ \gamma &= \frac{m\sqrt{pp - \mathfrak{A}\mathfrak{E}}}{\sqrt{2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E}}}, & \eta &= \frac{\sqrt{pp - \mathfrak{A}\mathfrak{E}}}{\sqrt{2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E}}}, \end{aligned}$$

und

$$\zeta = \frac{\mathfrak{D}(mp - \mathfrak{A}) - \mathfrak{B}(m\mathfrak{E} - p)}{\sqrt{(pp - \mathfrak{A}\mathfrak{E})(2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E})}}$$

sein. Nach Finden von diesen wird

$$B = \beta\zeta - \alpha\eta - \gamma\delta, \quad D = \zeta\theta - \gamma\varkappa - \varkappa\eta$$

und

$$C = \zeta\zeta + 2\beta\theta - \alpha\varkappa - \delta\varkappa - 4\gamma\eta$$

sein wird. Nun setze man

$$\int \frac{dy(\mathfrak{P} + n\mathfrak{B}y + n\mathfrak{A}yy)}{\sqrt{\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E}}} = \text{Konst.} + mx + ny + pxy$$
$$- \int \frac{dx(P + Qx + Rxx)}{\sqrt{2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx}}$$

und man findet wie zuvor

$$m = \frac{\beta\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}, \quad n = \frac{\gamma\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}} \quad \text{und} \quad p = \frac{\alpha\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}},$$

weiter

$$P = \mathfrak{P} + \frac{(\beta\theta - \gamma\eta)\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}, \quad Q = \frac{B\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}} \quad \text{und} \quad R = 0.$$

Es ist aber notwendig, dass in der vorgelegten Form $\mathfrak{A}\mathfrak{Q} = \mathfrak{B}\mathfrak{R}$ ist, und daher gibt diese Reduktion keine neuen Fälle an die Hand. Aber nach Setzen von $x = zz$ geht die transformierte Formel in diese über

$$-2 \int \frac{dz(P + Qzz)}{\sqrt{2Bz^4 + Cz^2 + 2D}},$$

welche Reduktion oft leichter gelingt als die vorhergehende.